ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XIX 1974 Выпуск 4

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИКИ МИЗЕСА — СМИРНОВА

А. И. ОРЛОВ

Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения. Для проверки гипотезы о совпадении функции распределения η_i с $F(x)$ применяют ([1], стр. 130) статистику

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2 \, dF(x),$$

где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi(x, \eta_i); \quad \chi(x, \eta) = \begin{cases} 1, & \eta < x, \\ 0, & \eta \geqslant x. \end{cases} \tag{1}$$

Статистика ω_n^2, предложенная Мизесом, изучалась Н. В. Смирновым ([2], [6], см. также обзор [33]). В дальнейшем считаем, что гипотеза верна, т. е. η_i, $i = 1, \ldots, n$, имеют непрерывную функцию распределения $F(x)$. Полезна следующая лемма из [2].

Лемма 1. *Закон распределения ω_n^2 не зависит от вида непрерывной функции $F(x)$.*

В силу леммы 1 без ограничения общности будем считать, что $F(x)$ — функция равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$. Введем эмпирический процесс

$$\xi_n(x) = \sqrt{n}\,(F_n(x) - x). \tag{2}$$

Как известно, конечномерные распределения $\xi_n(x)$ сходятся к конечномерным распределениям $\xi(x)$ — гауссовского процесса на $[0, 1]$, такого, что $M\xi(x) = 0$, $M\xi(x)\,\xi(y) = x(1 - y)$ при $x \leqslant y$; $\xi(y)$ — условный винеровский процесс при условии $\xi(1) = 0$. В соответствии с эвристическим подходом Дуба [34] распределение $\omega_n^2 = \int_0^1 \xi_n^2(x)\,dx$ сходится ([29], [3], стр. 635) к распределению

$$\omega^2 = \int_0^1 \xi^2(x)\,dx. \tag{3}$$

Функция распределения ω^2 впервые табулирована в [4] (см. также [1], таблица 6.4а).

Положим

$$\Delta_n = \sup_{-\infty<z<\infty} |\mathbf{P}\{\omega_n^2 < z\} - \mathbf{P}\{\omega^2 < z\}|. \tag{4}$$

О ц е н к а. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $b(\varepsilon)$, *что при всех* n

$$\Delta_n < b(\varepsilon)\, n^{-a+\varepsilon}. \tag{5}$$

Впервые степенная оценка скорости сходимости распределения ω_n^2 к пределу была получена В. В. Сазоновым, доказавшим справедливость (5) сначала [7] для $a = 1/_{10}$, а затем [8] для $a = 1/_6$. Используя представление Скорохода [30] последовательности независимых случайных величин с помощью значений винеровского процесса в случайные моменты времени, Розенкранц [9] доказал (5) для $a = 1/_5$. Следуя по тому же пути, Я. Ю. Никитин [13] и Кифер [14] независимо друг от друга доказали оценку (5) при $a = 1/_4$ для некоторого класса статистик, в который входит ω_n^2. Они же установили, что метод Скорохода не позволяет получить (5) для $a > 1/_4$. В предварительном сообщении [10] автора a было увеличено до $1/_3$. Настоящая работа посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема. *Оценка* (5) *справедлива при* $a = 1/_2$ *и несправедлива при* $a > 1$.

Для доказательства разработан специальный подход, отличающийся как от подхода Сазонова, так и от подхода Розенкранца — Никитина — Кифера. Характерным для него является использование неравенства Чебышева, формулы Стирлинга, многомерного обобщения разложения Эйлера — Маклорена, т. е. возврат к начальным методам теории вероятностей (ср. [23]).

Статистики типа ω^2 широко применяются во многих областях [33]. Например, для проверки принадлежности функции распределения выборки параметрическому семейству $F(x \mid \theta)$ рассматривают ([21], [32]) статистику

$$n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x \mid \theta_n))^2\, dF(x \mid \theta_n),$$

где θ_n — оценка истинного значения параметра θ. В частности составлены таблицы для критерия нормальности ([35], [16]). Статистики типа ω^2 используют для проверки совпадения функций распределения нескольких выборок ([37], [39, [36]), независимости координат ([31], [42]), симметрии распределения ([27], [40]), равномерности распределения на окружности [41] и т. д.

Подход, изложенный в настоящей работе, позволяет получать оценки скорости сходимости вида (5) для широкого класса статистик типа ω^2. Поскольку рассуждения довольно пространны, автору представляется полезным подробно изложить их в простейшем случае статистики ω_n^2. Некоторые дальнейшие результаты приведены в [18], [19]. Отметим, что для введенного в [19] класса статистик оценка (5) верна при $a = 1/_2$, а для некоторых типичных представителей этого класса оценка (5) не верна при $a > 1/_2$. В дополнение к [18], [19] укажем, что оценка (5) при $a = 1/_2$

верна для статистик типа ω^2, применяемых для проверки нормальности [35], [16].

В теореме не говорится о значениях a из интервала $(^1/_2, 1]$. По мнению автора, верна одна из следующих двух гипотез.

I. Оценка (5) неверна при $a > {^1/_2}$ (Розенкранц [9]).

II. Оценка (5) верна при $a = 1$. В пользу этой гипотезы говорят некоторые численные результаты [43].

В процессе доказательства теоремы эмпирической процесс $\xi_n(x)$ приближается кусочно постоянным процессом, промежутки постоянства которого не зависят от случая. Введем точки разбиения $d_i = \frac{2i-1}{2m}$, $i = 1, \ldots, m$, и оператор A, действующий на функции, определенные на $[0, 1]$:

$$Af(x) = f(d_i) \text{ при } d_i - \frac{1}{2m} \leqslant x < d_i + \frac{1}{2m},$$
$$Af(1) = f(d_m).$$

Имеем следующие равенства:

$$\omega_n^2 = \int_0^1 A\xi_n^2(x)\,dx + \int_0^1 (\xi_n^2(x) - A\xi_n^2(x))\,dx, \tag{6}$$

$$\omega^2 = \int_0^1 A\xi^2(x)\,dx + \int_0^1 (\xi^2(x) - A\xi^2(x))\,dx. \tag{7}$$

Мы покажем, что вторые слагаемые в (6) и (7) малы, и оценим их; оценим расхождение между распределениями первых слагаемых; пользуясь свободой в выборе m, закончим доказательство оценки (5) для $a = {^1/_2}$. Отметим, что разложения вида (6), (7) играют важную роль в предельной теории статистик интегрального типа [28].

1. Постоянно будет использоваться простая лемма, вытекающая из неравенства Чебышева.

Лемма 2. *Пусть все моменты случайной величины ξ конечны. Тогда для любых $\alpha, \beta > 0$ можно выбрать такое $c(\alpha, \beta)$, что при всех $x > 0$ выполнено неравенство*

$$\mathbf{P}\{|\xi| > x^\beta\} < \frac{c(\alpha, \beta)}{x^\alpha}.$$

С помощью формулы (1) после некоторых вычислений и рассуждений образец которых приведен ниже, доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant 1$. Тогда $\mathbf{M}\xi_n(x_1)\,\xi_n(x_2) \ldots \xi_n(x_k)$ — многочлен от $x_1, x_2, \ldots, x_k$, степень и коэффициенты которого ограничены константами, зависящими лишь от k (но не от n). Многочленом является и $\mathbf{M}\xi(x_1)\,\xi(x_2) \ldots \xi(x_k)$.*

Обозначим

$$\delta(n, m) = \int_0^1 (\xi_n^2(x) - A\xi_n^2(x))\,dx.$$

Лемма 4. *Существуют константы $h(s)$, $s = 1, 2, \ldots$, такие, что при всех n выполнены неравенства*

$$\mathbf{M}\delta^{2s}(n, m) < \frac{h(s)}{m^{2s}}.$$

Аналогичные неравенства верны и для второго слагаемого в (7).

Доказательство. Меняя порядок интегрирования, по теореме Фубини получаем

$$M\delta^{2s}(n, m) = \sum_K \int M \prod_{j=1}^{2s} (\xi_n^2(x_j) - \xi_n^2(a_j))\, dx_1 \ldots dx_{2s}, \tag{8}$$

где K — куб с центром $a = (a_1, \ldots, a_{2s})$ и длиной ребра $^1/_m$; каждое из a_j, $j = 1, \ldots, 2s$, является одной из точек разбиения d_i, $i = 1, \ldots, m$. Сумма берется по всем m^{2s} наборам из $2s$ точек разбиения. Если $a_i = a_k$, то будем говорить, что соответствующие переменные x_i и x_k входят в одну группу. Все x_j, $j = 1, \ldots, 2s$, разбиваются на несколько групп и свободные переменные, которыми без ограничения общности можно считать $x_1, \ldots, x_t$. Каждая свободная переменная в одиночку образует группу. Подынтегральное выражение в (8) равно

$$\Sigma\ (-1)^\alpha f(y_1, \ldots, y_{2s}), \tag{9}$$

где

$$f(y_1, \ldots, y_{2s}) = M\xi_n^2(y_1) \ldots \xi_n^2(y_{2s}),$$

$y_j = x_j$ или $y_j = a_j$, α — число a_j, $j = 1, \ldots, 2s$, среди аргументов, сумма берется по всем 2^{2s} возможным наборам y_j. Если y_i и y_k входят в разные группы, то их упорядоченность не зависит от принимаемых значений, если в одну — то зависит. Функция f инвариантна относительно перестановок аргументов. Если y_j, $j = 1, \ldots, 2s$, упорядочены по возрастанию, то f по лемме 3 является многочленом.

Проинтегрируем в (8) сначала по свободным переменным, зафиксировав остальные и обозначив их значения $g = (y_{t+1}, \ldots, y_{2s})$. Разложим $f(y_1, \ldots, y_{2s}) = f(y_1, \ldots, y_t, g)$ как функцию от $y_1, \ldots, y_t$ по многомерной формуле Тейлора в точке $(a_1, \ldots, a_t)$. Ряд будет конечным. Члены, в которые не входит хотя бы одна свободная переменная, например, $x_1 - a_1$, сократятся, так как вместе с $f(x_1, y_2, \ldots, y_t, g)$ в сумму (9) входит с противоположным знаком и $f(a_1, y_2, \ldots, y_t, g)$. Члены, в которые хотя бы одна из разностей $x_i - a_i$, $i = 1, \ldots, t$, входит в нечетной степени, при интегрировании дадут 0 из-за симметрии куба. Таким образом, главный член равен

$$\int B(g)(x_1 - a_1)^2 (x_2 - a_2)^2 \ldots (x_t - a_t)^2\, dx_1 \ldots dx_t.$$

Поскольку $B(g)$ получается из $f(y_1, \ldots, y_{2s})$ дифференцированием по некоторым переменным, то $B(g)$ — многочлен от $y_{t+1}, \ldots, y_{2s}$, степень и коэффициенты которого ограничены константами, зависящими лишь от s. То же верно для степеней и коэффицентов многочленов от g, являющихся коэффициентами в разложении f как функции $y_1, \ldots, y_t$. Число членов разложения ограничено константой, зависящей лишь от s. Будем рассматривать лишь главный член — для остальных рассуждения аналогичны. Проинтегрировав его, получим $B(g)(12)^{-t}m^{-3t}$.

Оставшееся под интегралом в (8) выражение отличается от (9) лишь заменой $f(y_1, \ldots, y_{2s})$ на $B(g)(12)^{-t}m^{-3t} = B(y_{t+1}, \ldots, y_{2s})(12)^{-t}m^{-3t}$ и соответствующим уменьшением числа переменных. Область интегрирования разобьем на части, в которых упорядоченность $2(2s-t)$ чисел $x_{t+1}, \ldots, x_{2s}, a_{t+1}, \ldots, a_{2s}$ не меняется. Число частей зависит лишь от s. Рассмотрим одну из них. Рассмотрим переменные одной группы, обозначив остальные z и зафиксировав их. По формуле Тейлора получим, что $B(g)$ равно сумме слагаемых вида $C(z)(x_i - a_i) + \ldots$, где $C(z)$ — многочлены, обладающие теми же свойствами ограниченности параметров, что и $B(g)$, а число слагаемых зависит лишь от s. К многочленам $C(z)$ применимо предыдущее рассуждение. При рассмотрении переменных очередной группы в каждом слагаемом выявляется хотя бы один множитель типа $(x_i - a_i)$, где переменная x_i относится к рассматриваемой группе. Перебрав все группы и проинтегрировав, окончательно получим, что слагаемое в (8), имеющее t свободных переменных и q групп более чем из одного переменного, не превосходит $Hm^{-q-2t-2s}$, где константа H зависит лишь от s. Число способов, которыми можно $2s$ переменных разбить на t свободных и q групп, зависит лишь от s, число соответствующих слагаемых при каждом способе равно A_m^{t+q}, что меньше m^{t+q}. Следовательно, сумма их не превосходит Hm^{-2s-t}, что и доказывает лемму 4. Рассмотрев случай $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2s}$, убедимся, что заменить $2s$ в правых частях неравенств леммы на большие числа нельзя.

Аналогично проводится доказательство для второго слагаемого в (7).

2. В дальнейшем $m = m(n) = C[n^\alpha]$, где C — натуральная константа, $\alpha \leqslant \alpha_0 < \frac{1}{2}$, квадратные скобки обозначают целую часть числа. Константы в получаемых ниже оценках зависят от α_0, кроме специально оговоренных случаев.

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
x(i) &= \xi_n(d_i), \quad i = 1, \ldots, m, \\
y(i) &= \sqrt{m}\,(x(i+1) - x(i)), \quad i = 1, \ldots, m-1, \\
y(0) &= \sqrt{m}\, x(1), \\
y(m) &= -\sqrt{m}\, x(m), \\
\gamma(n, m) &= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=0}^{m} y^3(i).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Лемма 5. *Все моменты $y(i)$, $i = 0, \ldots, m$, существуют и ограничены константами, не зависящими от i, m, n и α_0.*

Используя неравенство

$$\mathbf{P}\{\max_{0 \leqslant i \leqslant m} |y(i)| > x\} \leqslant \sum_{i=0}^{m} \mathbf{P}\{|y(i)| > x\}$$

и леммы 2 и 5, доказываем следующее утверждение.

Лемма 6. *Для любых α, $\beta > 0$ существует $c_1(\alpha, \beta)$, такое, что при всех n, m*

$$\mathbf{P}\{\max_{0 \leqslant i \leqslant m} |y(i)| > n^\alpha\} < \frac{c_1(\alpha, \beta)}{n^\beta}.$$

Лемма 7. *Все моменты $\gamma\ (n,\ m)$ существуют и ограничены константами, не зависящими от n, m и α_0.*

Леммы 3, 5 и 7 доказываются аналогично, поэтому приведем лишь более трудное доказательство леммы 7.

а. Имеем:

$$\mathrm{M}\gamma^{2s}(n, m) = m^{-s} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{2s}=0}^{m} \mathrm{M} y^3(k_1)\, y^3(k_2) \dots y^3(k_{2s}). \tag{11}$$

Некоторые из индексов k_i в (11) могут совпадать. Число способов разбиения $2s$ индексов на группы совпадающих (в группе может быть и один индекс) зависит лишь от s. Рассмотрим одно из таких разбиений, число групп равных индексов в котором есть a. Ему в (11) соответствует $m(m-1)\dots(m-a+1)$ слагаемых. Для доказательства леммы 7 достаточно показать, что каждое из них не превосходит $b(s)\, m^{s-a}$, где $b(s)$ зависит лишь от s.

б. Рассмотрим для простоты только случай, когда ни одно из k_i не равно 0 или m. Положим $\nu(j, i) = \chi(d_{j+1}, \eta_i) - \chi(d_j, \eta_i) - \frac{1}{m}$, тогда (см. (1), (2), (10))

$$y(j) = \sqrt{\frac{m}{n}} \sum_{i=1}^{n} \nu(j, i).$$

Каждое слагаемое из (11) равно сумме

$$\Sigma \mathrm{M}\nu(k_1, i_1)\, \nu(k_1, i_2)\, \nu(k_1, i_3)\, \nu(k_2, i_4) \dots \nu(k_{2s}, i_{6s}) \tag{12}$$

(индексы i_j, $j = 1, \dots, 6s$, пробегают все целые значения от 1 до n), умноженной на $m^{3s} n^{-3s}$. Из независимости наблюдений $\eta_1, \dots, \eta_n$ и того, что $\mathrm{M}\nu(i, j) = 0$, следует, что отличными от 0 могут быть лишь те выражения в (12), где все индексы разбиты на группы равных, и в каждой группе не менее двух индексов. Каждое математическое ожидание в (12) разбивается на произведение членов, относящихся к одному и тому же η. Как легко подсчитать (все $r(1), \dots, r(b)$ различны),

$$\mathrm{M}\nu^{\alpha(1)}(r(1), i) \dots \nu^{\alpha(b)}(r(b), i) = \frac{1}{m} \cdot \left(-\frac{1}{m}\right)^{\alpha(1)+\dots+\alpha(b)} \times$$
$$\times \{(1-m)^{\alpha(1)} + \dots + (1-m)^{\alpha(b)} + m - b\}. \tag{13}$$

в. Индексы в (12) можно разбить на группы равных числом способов, зависящим только от s, поэтому достаточно показать, что сумма Σ' по каждому такому разбиению не превосходит $b_1(s)\, m^{s-a}$. Пусть в разбиении c групп равных индексов. В Σ' входит $n(n-1)\dots(n-c+1)$ слагаемых. Из (11), (12), (13) и того, что $m^2 n^{-1}$ ограничено, следует, что каждое слагаемое из Σ' не превосходит по модулю

$$b_2(s)\, n^{-c} m^{-9s+c+\sum_{j=1}^{c} \beta(j)},$$

где $\beta(j)$ — максимальное из $\alpha(\cdot)$ в j-й группе (см. (13)). Методом математической индукции можно доказать, что показатель степени m максимален в случае некоторого разбиения индексов на пары (т. е. $c = 3s$). Пары бывают «чистые» $\mathbf{M}\nu^2(r, i)$, для которых $\beta = 2$, и «смешанные» $\mathbf{M}\nu(r_1, i)\times \times\nu(r_2, i)$, для которых $\beta = 1$. Таким образом, каждое слагаемое из (11) не превосходит $b_3(s)\, m^{-\sigma}$, где σ равно минимальному числу «смешанных» пар. Если число элементов в группе равных индексов из (11) нечетно, то есть хотя бы одна «смешанная» пара с индексом из этой группы. Легко проверить, что количество групп с нечетным числом элементов не меньше $2(a - s)$, чем завершается доказательство леммы 7.

3. Вероятность того, что из n наблюдений в $\left[0, \frac{1}{2m}\right)$ попало k_0, в $\left[\frac{1}{2m}, \frac{3}{2m}\right)$ попало $k_1, \ldots$, в $[d_i, d_{i+1})$ попало $k_i, \ldots$, в $\left[1 - \frac{1}{2m}, 1\right]$ попало k_m, находится по формуле для мультиномиального распределения ([11], п. 6.3).

$$p(k_0, k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_0!k_1!\ldots k_m!}\left(\frac{1}{m}\right)^{k_1+\ldots+k_{m-1}}\left(\frac{1}{2m}\right)^{k_0+k_m}. \qquad (14)$$

Известна следующая формула Стирлинга ([12], п. 469):

$$a! = \sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^a \exp\left(\frac{1}{12a} - \frac{\theta(a)}{360a^3}\right), \quad 0 < \theta(a) < 1. \qquad (15)$$

С помощью (1), (2) и (10) выразим k_i через $y(i)$. Используя (15), преобразуем (14):

$$p(k_0, k_1, \ldots, k_m) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}\, 2m^{-\frac{m+1}{2}}\left\{\left(1 + 2\sqrt{\frac{m}{n}}\, y(0)\right)^{-k_0-\frac{1}{2}}\left(1 + \right.\right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{m}{n}}\, y(1)\right)^{-k_1-\frac{1}{2}} \ldots \left(1 + \sqrt{\frac{m}{n}}\, y(m-1)\right)^{-k_{m-1}-\frac{1}{2}} \times$$
$$\left.\times\left(1 + 2\sqrt{\frac{m}{n}}\, y(m)\right)^{-k_m-\frac{1}{2}}\right\}\exp\left(-\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{12k_i}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m \times$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{\theta(n)}{360n^3} + \sum_{i=0}^{m}\frac{\theta(k_i)}{360k_{3i}}\right). \qquad (16)$$

Условный винеровский процесс $\xi(x)$ имеет в точке $X = (x(1), \ldots \ldots, x(m))$ плотность (см. (10))

$$f(X) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}\, 2m^{-\frac{m+1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(2y^2(0) + \right.$$
$$\left. + y^2(1) + \ldots + y^2(m-1) + 2y^2(m))\right\}. \qquad (17)$$

Рассмотрим точки $(x(1), \ldots, x(m))$, такие, что $\sqrt{n}x(i) + nd_i$, $i = 1, \ldots \ldots, m$ — целые и $x^2(1) + \ldots + x^2(m) < m\,z$. Вероятность

$$p_{nm}(z) = \mathbf{P}\left\{\int_0^1 A\xi_n^2(x)\,dx < z\right\}$$

получается суммированием (16) по всем таким точкам. Выделим кубы с центрами в этих точках, ребра которых параллельны осям координат и имеют длину $1/\sqrt{n}$. Объединение этих кубов обозначим S_0. Тогда $p_{nm}(z)$ можно получить интегрированием по S_0 функции $\bar{f}(x(1), \ldots, x(m))$, постоянной в каждом кубе и равной в нем $p(k_0, k_1, \ldots, k_m)\, n^{m/2}$, где k_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, определяют центр куба. Вероятность же

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 A\xi^2(x)\,dx < z\right\}$$

получается интегрированием плотности (17) по шару $x^2(1) + x^2(2) + \ldots \ldots + x^2(m) < mz$.

Положим ($\rho > 0$)

$$A(\rho) = \{\max_{0\leqslant i\leqslant m} |y(i)| < n^\rho, \quad |\gamma(n, m)| < n^\rho\}.$$

Из лемм 6 и 7 следует, что $1 - \mathbf{P}(A(\rho))$ убывает быстрее любой степени n. Для любой системы S кубов обозначим $S_1 = S_1(\rho)$ объединение тех кубов из S, которые полностью лежат в $A(\rho)$.

Для всех точек $A(\rho)$ последний множитель в (16) равен $1 + O(1/n)$. Прологарифмируем заключенную в фигурные скобки часть (16), разложим логарифмы в ряды и просуммируем:

$$\ln\{\cdot\} = -\sqrt{\frac{n}{m}}\sum_{j=0}^{m} y(j) - \frac{1}{2}\{2y^2(0) + y^2(1) + \ldots + y^2(m-1) + 2y^2(m)\} + \\ + \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^i (-\lambda(j)\,y(j))^i\left\{\frac{1}{2i} - \frac{\lambda(j)\,y^2(j)}{(i+1)(i+2)}\right\}, \qquad (18)$$

где $\lambda(j) = 1$ для $j = 1, \ldots, m-1$ и $\lambda(j) = 2$ для $j = 0, m$. Первая сумма в (18) равна 0, вторая — аргументу экспоненты в (17), третья представляют собой отклонение от предельного распределения. Разложив $1/k_i$ в ряд, получим для центров $X = (x(1), \ldots, x(m))$ кубов из $A(\rho)$ равенство

$$\bar{f}(X) = f(X)\exp\left\{\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^i(-\lambda(j)\,y(j))^i\left(\frac{1}{2i} - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{\lambda(j)\,y^2(j)}{(i+1)(i+2)} - \frac{1}{12}\mu\left(i, \frac{1}{\lambda(j)\,y^2(j)}\right)\right)\right\}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad (19)$$

где $\mu(1, z) = 0$, $\mu(i, z) = z$ при $i > 1$.

4. Из неравенства

$$|e^x - 1| < 2|x| \text{ при } |x| < \frac{1}{2}$$

и определения $A(\rho)$ следует, что (19) остается верным при замене верхней границы суммирования по i на $l = l(\alpha_0)$ вместо ∞.

Разложим экспоненту в (19) в ряд.

Лемма 8. *Для всех центров $X = (x(1), \ldots, x(m))$ кубов из S_1 выполнено равенство*

$$\bar{f}(X) = f(X)\left\{1 + \sum_{i=1}^{l}\left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i g(i, m)\right\}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad (20)$$

где $g(i, m)$, $i = 1, \ldots, l$, *являются многочленами от* $y(0), y(1), \ldots, y(m)$ *степень которых зависит лишь от* i, *а коэффициенты могут зависеть еще и от* m. *Константа в* $O(1/n)$ *одна и та же для всего* S_1. *Для любого* $\delta > 0$ *найдется* $h(\delta)$, *такое, что* $|g(i, m)| < h(\delta) n^{\delta}$ *при* $i = 1, \ldots, l$ *на всем* $S_1 \subset A(\rho)$, *где* $\rho = \rho(\delta)$.

Приведем лишь основную идею доказательства. Разложение в ряд экспоненты в (19) состоит из слагаемых вида (с точностью до числовых коэффициентов и $\lambda(j)$)

$$\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^{q(1)+\ldots+q(k)} \sum_{i(1),\ldots,i(k)=1}^{m} y^{\sigma(1)}(i(1)) \ldots y^{\sigma(k)}(i(k)),$$

что является произведением соответствующих сумм по отдельным индексам. Для любого $\tau > 0$ найдется $H(\tau)$, такое, что сумма по $i(j)$ не превосходит $H(\tau)\, m^{2q(j)} n^{-q(j)+\tau}$. Это утверждение при $q(j) \geqslant 2$ следует из леммы 6, а при $q(j) = 1$ — из леммы 7 и того, что сумма всех $y(i)$ равна 0.

Опишем многомерный аналог асимптотического разложения Эйлера — Маклорена (ср. одномерный случай с изложением [12], стр. 542). Пусть T — множество точек с целыми координатами p-мерного линейного пространства. Решеткой назовем множество $hT + a$, где положительное число h — шаг решетки, вектор a определяет положение одной из вершин решетки. Будем изучать сумму значений функции $g(x)$, $x = (x^1, \ldots, x^p)$, по подмножеству A точек решетки. Функция $g(x)$ предполагается достаточное число раз дифференцируемой. Опишем переход от суммы к асимптотическому разложению по степеням h.

С каждой точкой решетки свяжем куб с центром в этой точке, ребра которого параллельны осям координат и имеют длину h. Таким образом с точкой $(a^1, \ldots, a^p)$ связан куб $\left\{x : a^i - \frac{h}{2} \leqslant x^i < a^i + \frac{h}{2}\right\}$. Кубы, связанные с точками решетки, заполняют пространство без пропусков и наложений. Коэффициентами в многомерном аналоге асимптотического разложения Эйлера — Маклорена по степеням h являются интегралы от производных функции $g(h)$ по объединению кубов, связанных с точками A.

Пусть x_0 — центр куба B. Разложим $g(x)$ по многомерной формуле Тейлора в точке x_0. Для демонстрации метода выпишем лишь члены с первыми четырьмя производными:

$$g(x) = g(x_0) + \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k!} D_x^k g(x_0) + \ldots, \tag{21}$$

где

$$D_x^k g(x_0) = \left(\sum_{i=1}^{p} (x^i - x_0^i) \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k g(x)\Big|_{x=x_0}.$$

Проинтегрируем почленно обе части (21) по кубу B. Интегралы тех слагаемых, в которые хотя бы одно приращение переменных $x^i - x_0^i$ входит в нечетной степени, равны 0 в силу симметрии куба, который отображается на себя при замене переменных $x_1^j = x^j$, $j \neq i$, $x_1^i = 2x_0^i - x^i$. Таким образом,

$$g(x_0)h^p = \int\limits_B g(x)\,dx - \frac{h^2}{24}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 g(x_0)}{\partial (x^i)^2}h^p -$$

$$-\frac{h^4}{3456}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{p}\frac{\partial^4 g(x_0)}{\partial (x^i)^2\,\partial (x^j)^2}h^p - \frac{h^4}{1920}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^4 g(x_0)}{\partial (x^i)^4}h^p - \ldots . \tag{22}$$

К каждому слагаемому в правой части (22) можно применить аналогичное преобразование. Так, например,

$$\frac{\partial^2 g(x_0)}{\partial (x^i)^2}h^p = \int\limits_B \frac{\partial^2 g(x)}{\partial (x^i)^2}\,dx - \frac{h^2}{24}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^4 g(x_0)\,h^p}{\partial (x^i)^2\,\partial (x^j)^2} - \ldots . \tag{23}$$

Подставим (23) в (22):

$$g(x_0)h^p = \int\limits_B g(x)\,dx - \frac{h^2}{24}\sum_{i=1}^{p}\int\limits_B \frac{\partial^2 g(x)}{\partial (x^i)^2}\,dx + O(h^4)\,h^p. \tag{24}$$

Действуя аналогично, для любого l можно получить асимптотическое разложение с остаточным членом порядка $h^{2l}\cdot h^p$.

Весьма важным для дальнейшего является тот факт, что в описанное разложение не входят частные производные, в которых дифференцирование хотя бы по одному из x_i, $i=1,\ldots,p$, производится нечетное число раз, в результате чего при больших p существенно сокращается число слагаемых в суммах при h^{2s}, $s=1, 2, \ldots$. Предложенные другими авторами многомерные обобщения формулы Эйлера — Маклорена не обладают этим полезным свойством (см. [20], [22], [24], [38]).

Распределение случайного вектора $(\xi_n(d_1), \ldots, \xi_n(d_m)) = \xi$ сосредоточено в точках решетки $\frac{1}{\sqrt{n}}T + a$ в m-мерном пространстве, где $a = (n^{-1/2}([nd_1] - nd_1), \ldots, n^{-1/2}([nd_m] - nd_m))$. Вероятность того, что ξ попадет в объединение кубов S, равна

$$\sum_S \bar{f}(x(1), \ldots, x(m))\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m, \tag{24'}$$

где значения $\bar{f}$ берутся в центрах кубов. Воспользуемся равенством (20) — применим асимптотическую формулу Эйлера — Маклорена в многомерном случае к каждому слагаемому в правой части (20), рассматриваемому в соответствии с (10) как функция $(x(1), \ldots, x(m))$. Как указано при доказательстве леммы 8, с точностью до числового множителя слагаемые имеют вид

$$\prod_{i=0}^{m} y^{\alpha_i}(i)\exp\left\{-\frac{1}{2}(\lambda(i)y^2(i))\right\}, \tag{25}$$

где $\lambda(i) = 1$, $i = \overline{1, m-1}$, $\lambda(0) = \lambda_m = 2$, α_i — целые неотрицательные. Из (10) следует, что для любой дважды дифференцируемой функции g

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2(i)} = m\left[\frac{\partial^2 g}{\partial y^2(i-1)} - 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial y(i-1)\,\partial y(i)} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2(i)}\right]. \tag{26}$$

Легко видеть, что функции (25) разлагаются в равномерно сходящиеся в кубе из S, в центре которого берется разложение, бесконечные ряды Тейлора (m и n фиксированы). Следовательно, почленное интегрирование по кубу законно. Проводя его, получим бесконечный ряд, несколько первых членов которого выписано в (22). Сделаем замену по формуле (26) и воспользуемся явным видом (25) слагаемых из (20). Мы получим, что перед суммой $2k$-х производных по y в бесконечном ряду стоит множитель $m^k h^{2k} = m^k n^{-k}$, число участвующих в этой сумме производных не более $4^k m^k$, каждая из производных берется от функций вида (25). Пользуясь тем, что степени слагаемых в (20) ограничены, и явным видом сомножителей в (25), можно показать, что для любого $\tau > 0$ существуют $H(\tau)$ и n_0, такие, что для любого слагаемого вида (25), участвующего в (20), сумма $2k$-х производных в (22) не превосходит (при условии $x \in A(\rho)$, $\rho = \rho(\tau)$)

$$a_k = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m H(\tau) \left(\frac{m^2}{n}\right)^k n^{\tau(n_0+2k)} f(x(1), \ldots, x(m)).$$

Поскольку $m = C[n^\alpha]$, $\alpha \leqslant \alpha_0 < 1/2$, то существует такое k_0, что $\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty} a_k = O(n^{-1}) f(x(1), \ldots, x(m))$. Из (20) и (22) получаем, сгруппировав члены с одной и той же степенью n в качестве множителя, что

$$\sum_{S_1} \bar{f}(X)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m = \int_{S_1} f(X)\left\{1 + \sum_{i=1}^{l}\left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i g(i, m)\right\} dX\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \\ + \frac{m^2}{n}\sum_{S_1}\left(\sum_{i=0}^{k_0} g_1(i, m)\left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i f(X)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{27}$$

где $X = (x(1), \ldots, x(m))$, $g_1(i, m)$ являются многочленами от $y(0)$, $y(1), \ldots, y(m)$, степень которых зависит лишь от i, а коэффициенты могут зависеть еще и от m.

Лемма 9. *Для любого $\delta > 0$ найдется $h_1(\delta)$, такое, что $|g_1(i, m)| < h_1(\delta) n^\delta$ при $i = 0, 1, \ldots, k_0$ для всех точек $(y(0), \ldots, y(m))$ из $A(\rho)$ при некотором $\rho = \rho(\delta)$.*

Для доказательства отметим, что все слагаемые в (20) можно разбить на два класса. В первый входят те, что получаются при разложении экспоненты из произведений вида

$$h(y(0), \ldots, y(m)) = \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=0}^{m} y^3(i)\right)^k y^{\alpha_0}(0) \ldots y^{\alpha_m}(m), \tag{28}$$

а во второй — все остальные. Как в лемме 8, для слагаемых из второго класса утверждение леммы 9 можно получить исходя из того, что $\max\{|y(i)|, i = 0, \ldots, m\}$ растет медленнее любой степени n. Для функций, у которых множитель перед $f(y(0), \ldots, y(m))$ имеет вид (28), это рассуждение проходило бы, если бы перед суммой стоял множитель m^{-1}, а не $m^{-1/2}$. Воспользуемся равенством

$$\frac{\partial h(y(0), \ldots, y(m)) f(y(0), \ldots, y(m))}{\partial y(j)} = \sum_{s=0}^{k} C_k^s \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} y^3(i) \right)^{k-s} \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^{m} y^{\alpha_q}(q) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial y(j)} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{m}} y^3(j) \right)^s y^{\alpha_j}(j) f(y(0), \ldots, y(m)) \right]. \quad (29)$$

Из лемм 6, 7 следует, что h $(y(0), \ldots, y(m))$ растет медленнее любой степени n. Равенство (29) показывает, что множитель перед f $(y(0), \ldots, y(m))$ во всех производных функции h $(y(0), \ldots, y(m))$ f $(y(0), \ldots, y(m))$ также растет медленнее любой степени n. Используя ограниченность степеней $g(i, m)$ в (20) и явный вид производных функций вида (25), завершаем доказательство леммы 9.

В правой части формулы (27) стоит умноженная на $m^2 n^{-1}$ сумма значений некоторой функции по центрам кубов. Поступим с ней так же, как действовали только что с суммой в (24′). В результате получим, что

$$\sum_{S_1} \bar{f}(X) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m = \int_{S_1} f(X) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{l_1} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}} \right)^i g_2(i, m) \right\} dX \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right) +$$

$$+ \left(\frac{m^2}{n} \right)^2 \sum_{S_1} \left(\sum_{i=0}^{k_1} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}} \right)^i g_3(i, m) f(X) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right). \quad (30)$$

Аналогично предыдущему можно показать, что g_2 (i, m) и g_3 (i, m) обладают теми же свойствами, что g (i, m) и g_1 (i, m). Отметим, что в правой части (30) перед суммой по центрам кубов стоит множитель $m^4 n^{-2}$, в то время как в (27) был множитель $m^2 n^{-1}$.

Повторяя описанные выше преобразования некоторое конечное число раз, при каждом из которых увеличивается на единицу степень множителя $m^2 n^{-1}$ перед суммой по центрам кубов в правых частях формул, аналогичных (27) и (30), получим, что

$$\sum_{S_1} \bar{f}(X) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m = \int_{S_1} f(X)\, dX \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{l_s} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}} \right)^i g_s(i, m) \right\} \times$$

$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right) + O\left(\frac{1}{n} \right) \sum_{S_1} f(X) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m. \quad (31)$$

Воспользовавшись положительностью функции f (X), явным видом ее производных и оценив по модулю все члены в формуле (22) для f (X), начиная со второго, получим, что

$$\sum_{S_1} f(X) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m = \int_{S_1} f(X)\, dX + o(1) \sum_{S_1} f(X) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m.$$

Следовательно, в правой части формулы (31) сумму по центрам кубов можно и не писать. Подытожим результаты рассуждений настоящего пункта в следующей лемме 10.

Лемма 10. *Существуют многочлены* $\tilde{g}(i, m)$, $i = 1, \ldots, \tilde{l}$, *от переменных* $y(0), y(1), \ldots, y(m)$, *степень которых зависит лишь от* i, *а коэффициенты могут зависеть еще и от* m, *такие, что*

$$\sum_{S_1} \bar{f}(X)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m = \int_{S_1} f(X)\left\{1 + \sum_{i=1}^{\tilde{l}} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i \tilde{g}(i, m)\right\} dX \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (32)$$

Для любого $\delta > 0$ *существует* $h(\delta)$, *такое, что* $|\tilde{g}(i, m)| < h(\delta) n^{\delta}$ *при* $i = 1, \ldots, \tilde{l}$ *на всем* S_1, *где* $S_1 = S \cap A(\rho)$, *причем* S — *любое объединение кубов решетки*, $\rho = \rho(\delta)$. *Константа в* $O(n^{-1})$ *зависит лишь от* ρ, *но не от* S.

5. Перейдем к оцениванию Δ_n из (4). Как показал Ю. В. Прохоров [15], функции $\mathbf{P}\{\omega_n^2 > z\}$ равномерно по n убывают экспоненциально быстро при $z \to \infty$. Столь же быстро убывает, естественно, и предельная функция $\mathbf{P}\{\omega^2 > z\}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно рассматривать супремум не по $(-\infty, \infty)$, а по $[0, n]$, что и будем делать в дальнейшем.

Обозначим $T(z)$ шар $x^2(1) + \ldots + x^2(m) < mz$. Обозначим $S_0 = S_0(z)$ объединение кубов, центры которых лежат в $T(z)$. Отметим, что для двух точек одного куба суммы $x^2(1) + \ldots + x^2(m)$ отличаются не более чем на

$$2n^{-1/2}(x(1) + \ldots + x(m)) + mn^{-1}. \quad (33)$$

Лемма 11. *Для любого* $\delta > 0$ *существуют* $\varkappa(n, m)$ *и* Δz, *такие, что*

$$\sum_{S_0} \bar{f}(X)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m = \int_{T(z)} f(X)\left\{1 + \sum_{i=1}^{\tilde{l}} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i \tilde{g}(i, m)\right\} dX + O\left(\frac{1}{n}\right) + \varkappa(n, m) \int_{T(z+\Delta z)\setminus T(z-\Delta z)} f(X)\, dX, \quad (34)$$

причем $|\varkappa(n, m)| < h_1(\delta) n^{\delta}$, $0 < \Delta z < h_2(\delta) n^{\delta - 1/2}$ *при некоторых константах* $h_1(\delta)$, $h_2(\delta)$, *постоянная в* $O(n^{-1})$ *не зависит от* $z \in [0, n]$.

Доказательство. Положим $B(\rho) = \{\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x(i)| < n^{\rho}\}$. Для любой системы S кубов, связанных с точками решетки, для любого $\rho > 0$ пусть S_2 — объединение тех кубов из S, которые полностью лежат в $A(\rho) \cap B(\rho)$. Очевидно, что лемма 10 остается верной при замене S_1 на S_2. В преобразованной таким образом лемме 10 положим $S = S_0$. Поскольку вероятность попадания случайного вектора $(\xi_n(d_1), \ldots, \xi_n(d_m))$ в область $\overline{A(\rho)} \cup \overline{B(\rho)}$ по леммам 6,3 убывает быстрее любой степени n, то формула (32) остается справедливой, если слева суммирование производится по S_0, а справа интегралы берутся по S_2.

Сравним теперь предельную (т. е. задаваемую плотностью $f(X)$) вероятность попадания в построенную по S_0 систему кубов S_2 и в область $T(z) \cap A(\rho) \cap B(\rho)$. Пусть S^* — объединение кубов из S_0, среди точек которых некоторые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений $\max(|y(i)|, i = 0, \ldots, m\} = n^{\rho}$, $\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x(i)| = n^{\rho}$. Ясно, что предельная вероятность S^* убывает быстрее любой степени n, поскольку

$$S^* \subset \left\{ \max_{0\leqslant i\leqslant m} |y(i)| > n^\rho - \sqrt{\frac{m}{n}} \right\} \cup \left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x(i)| > n^\rho - \sqrt{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Вследствие (33) при $\Delta z = 2n^{-1/2+\rho} + n^{-1}$ справедливы включения

$$\{T(z-\Delta z) \cap A(\rho) \cap B(\rho) \setminus S^*\} \subset S_2 \subset \{T(z+\Delta z) \cap A(\rho) \cap B(\rho)\}.$$

Следовательно,

$$|\mathbf{P}(S_2) - \mathbf{P}(T(z) \cap A(\rho) \cap B(\rho))| \leqslant \mathbf{P}(T(z+\Delta z)) -$$
$$- \mathbf{P}(T(z-\Delta z)) + \mathbf{P}(S^*) = \int\limits_{\{T(z+\Delta z)\setminus T(z-\Delta z)\}\cap A(\rho)\cap B(\rho)} f(X)\,dX + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поскольку $\left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i \tilde{g}(i, m) \to 0$ при $n \to \infty$ при достаточно малом ρ, причем равномерно по $A(\rho) \cap B(\rho)$, то

$$\int\limits_{S_2} f(X)\left\{1 + \sum_{i=1}^{\tilde{l}} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i \tilde{g}(i, m)\right\} dX =$$
$$= \int\limits_{T(z)\cap A(\rho)\cap B(\rho)} f(X)\left\{1 + \sum_{i=1}^{\tilde{l}} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i \tilde{g}(i, m)\right\} dX +$$
$$+ \varkappa(n, m) \int\limits_{\{T(z+\Delta z)\setminus T(z-\Delta z)\}\cap A(\rho)\cap B(\rho)} f(X)\,dX + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{35}$$

где $\varkappa(n, m)$ и Δz имеют требуемые свойства. Поскольку $|y(i)| < 2\sqrt{m}\sqrt{z} < 2n^{3/4}$ в $T(z)$, а $\mathbf{P}\{T(z) \setminus (A(\rho) \cap B(\rho))\}$ убывает быстрее любой степени n, правые части (34) и (35) отличаются на интегралы по областям $T(z) \setminus (A(\rho) \cap B(\rho))$ и $\{T(z+\Delta z) \setminus T(z-\Delta z)\} \setminus \{A(\rho) \cap B(\rho)\}$, подынтегральными функциями в которых являются умноженные на $f(X)$ многочлены от $y(0), y(1), \ldots, y(m)$, удовлетворяющие перечисленным в лемме 10 условиям, то правые части (34) и (35) отличаются на $O(n^{-1})$. Лемма 11 доказана.

Нам будет полезна легко проверяемая лемма 12.

Лемма 12. *Если* $\mathbf{P}\{|\xi - \eta| > \varepsilon\} < \delta$, *то*

$$\mathbf{P}\{\eta < x - \varepsilon\} - \delta < \mathbf{P}\{\xi < x\} < \mathbf{P}\{\eta < x + \varepsilon\} + \delta$$

при всех x.

Из явного вида характеристической функции случайной величины ω^2 (см., например, [3], с. 635) и теоремы об обращении интеграла Фурье (см., например, [5], с. 581) следует лемма 13.

Лемма 13. *Распределение* ω^2 *имеет ограниченную непрерывную плотность.*

Перейдем непосредственно к оцениванию разности $\mathbf{P}\{\omega_n^2 < z\} - \mathbf{P}\{\omega^2 < z\}$. Из лемм 4 и 2 следует, что для любого $\gamma > 0$ существуют $d(\gamma)$, такие, что вторые слагаемые в правых частях (6) и (7) не превосходят $d(\gamma)\,m^{-1}n^\gamma$ на множестве A, таком, что $\mathbf{P}(A) > 1 - O(n^{-1})$. Применив лемму 12 с $\delta = 1 - \mathbf{P}(A)$ и $\varepsilon = d(\gamma)\,m^{-1}n^\gamma$ к $\xi = \omega_n^2$, $\eta = \int\limits_0^1 A\xi_n^2(t)\,dt$, получим, что

$$\sum_{S_0(z-\varepsilon)} \bar{f}(X)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m - \delta < \mathbf{P}\{\omega_n^2 < z\} < \sum_{S_0(z+\varepsilon)} \bar{f}(X)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m + \delta. \qquad (36)$$

Применив лемму 12 с теми же ε и δ к $\xi = \omega^2$ и $\eta = \int_0^1 A\xi^2(t)\,dt$, получим, что

$$\int_{T(z-\varepsilon)} f(X)\,dX - \delta < \mathbf{P}\{\omega^2 < z\} < \int_{T(z+\varepsilon)} f(X)\,dX + \delta. \qquad (37)$$

Нам понадобится следующий факт: если $a < b < c$ и $d < e < f$, то $b - e = \theta(c - d) + (1 - \theta)(a - f)$, где $0 < \theta < 1$. Использовав его в (36) и (37), получим, что

$$\mathbf{P}\{\omega_n^2 < z\} - \mathbf{P}\{\omega^2 < z\} = \theta\left(\sum_{S_0(z+\varepsilon)} \bar{f}(X)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m - \right.$$

$$\left. - \int_{T(z-\varepsilon)} f(X)\,dX\right) + (1-\theta)\left(\sum_{S_0(z-\varepsilon)} \bar{f}(X)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m - \int_{T(z+\varepsilon)} f(X)\,dX\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (38)$$

Применив лемму 12 с теми же ε и δ, что и раньше, к $\xi = \int_0^1 A\xi^2(t)\,dt$ и $\eta = \omega^2$, получим, что

$$\mathbf{P}\{\omega^2 < z - \varepsilon\} - \delta < \int_{T(z)} f(X)\,dX < \mathbf{P}\{\omega^2 < z + \varepsilon\} + \delta. \qquad (39)$$

Из леммы 13 и (39) следует, что для Δz из леммы 11

$$\int_{T(z+\Delta z)} f(X)\,dX - \int_{T(z)} f(X)\,dX = \theta_1 C_1 \varepsilon, \qquad (40)$$

где $|\theta_1| < 1$, C_1 — некоторая константа, ε — то же, что в (36).

Для $i = 1, \ldots, l$ положим

$$K(z, i, m) = \int_{T(z)} \tilde{g}(i, m) f(X)\,dX.$$

Для нас окажется важным, что $K(z, i, m)$ не зависит явно от n. Используя (40) и равенство

$$T(z) = \{T(z) \cap A(\rho)\} \cup \{T(z) \setminus A(\rho)\},$$

аналогично доказательству леммы 11 получаем, что для любого $\beta > 0$ и того же ε, что и в (36),

$$K(z, i, m) - K(z + \varepsilon, i, m) = \theta_2 c_1(\beta) n^\beta \varepsilon, \qquad (41)$$

$$|K(z, i, m)| < c_2(\beta) n^\beta, \qquad (42)$$

для $i = 1, \ldots, l$, где $|\theta_2| < 1$, $\theta_2 = \theta_2(i, z, m)$, $c_1(\beta)$ и $c_2(\beta)$ — некоторые константы, зависящие ... от β.

Используя лемму 11, формулы (38), (40) и (41), доказываем следующую лемму.

Лемма 14. *При* $z \in [0, n]$ *для любого* $\beta > 0$ *существует* $c(\beta)$, *такое, что*

$$\mathbf{P}\{\omega_n^2 < z\} - \mathbf{P}\{\omega^2 < z\} = \sum_{i=1}^{\tilde{l}} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i K(z, i, m) + \theta(n, m, z)\, c(\beta)\, n^\beta m^{-1} + O(n^{-1}), \tag{43}$$

где $|\theta(n, m, z)| < 1$, *константа в* $O(n^{-1})$ *не зависит от* z, *функции* $K(z, i, m)$, $i = 1, \ldots, \tilde{l}$, *удовлетворяют условию* (42).

6. Предыдущие рассуждения справедливы для $m = m(n) = c\,[n^\alpha]$, где $\alpha \leqslant \alpha_0$, $\alpha_0 < \frac{1}{2}$ — некоторое фиксированное число. Так, например, $\tilde{l} = \tilde{l}(\alpha_0)$. Выбор α_0, а затем α и C находится в нашем распоряжении. Пусть α_0 достаточно близко к $^1/_2$, в частности, $\alpha_0 > {}^1/_3$.

Можно проверить, что из-за симметрии шара $T(z)$ член с $i = 1$ в (43) исчезает. Выбирая α так, чтобы $m^2 n^{-1}$ и m^{-1} имели один и тот же порядок по n (т. е. $\alpha = {}^1/_3$), доказываем теорему 1 из [10]:

Лемма 15. *Оценка* (5) *верна при* $a = {}^1/_3$.

Воспользуемся свободой в выборе m. Положим $m = C\,[n^{\alpha_0}]$. Правая часть (43) есть $O(n^{-1/3+\varepsilon})$ по лемме 15. Поскольку $\alpha_0 > {}^1/_3$, то $m^{-1} = o(n^{-1/3})$ и порядок суммы в правой части (43) тот же, что и всей правой части:

$$\sum_{i=1}^{\tilde{l}} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i K(z, i, m) = O(n^{-1/3+\varepsilon}). \tag{44}$$

Тогда каждое слагаемое в левой части (44) также есть $O(n^{-1/3+\varepsilon})$. Действительно, положим $C = 1, 2, 2^2, \ldots, 2^{\tilde{l}-1}$ и рассмотрим соотношения (44) в каждом из этих l случаев. С помощью конечного числа арифметических действий с левыми частями соотношений получим, что

$$\left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i K(z, i, m) = O(n^{-1/3+\varepsilon}). \tag{45}$$

(Тут мы пользуемся тем, что $K(z, i, m)$ не зависят явно от n.) Выразив n через m, получим, что $K(z, i, m)$ есть $O(m^{\lambda(i)})$, где

$$\lambda(i) = -\frac{1}{3\alpha_0} + i\left(\frac{1}{2\alpha_0} - 1\right) + \frac{\varepsilon}{\alpha_0}. \tag{46}$$

Пусть $\lambda_1(i) = -\frac{1}{3\alpha_0} + i\left(\frac{1}{2\alpha_0} - 1\right)$. Положим $K_1(z, i, m) = m^{-\lambda_1(i)} K(z, i, m)$, если $\lambda_1(i) < 0$ и $K_1(z, i, m) = K(z, i, m)$ в противном случае. В новых обозначениях формула (43) принимает вид

$$\mathbf{P}\{\omega_n^2 < z\} - \mathbf{P}\{\omega^2 < z\} = \sum_{i=1}^{\tilde{l}} m^{b(i)} n^{-i/2} K_1(z, i, m) + \\ + \theta(n, m, z)\, c(\beta)\, n^\beta m^{-1} + O(n^{-1}), \tag{47}$$

где $b(i) = i + \lambda_1(i)$, если $\lambda_1(i) < 0$ и $b(i) = i$ в противном случае. Из-за произвольности $\varepsilon > 0$ в формулах (45), (46) $K_1(z, i, m)$, как и

$K(z, i, m)$, удовлетворяют условию (42). Каждое слагаемое суммы в (47) есть $O(n^{-1/3+\varepsilon})$ при $m = [n^{\alpha_0}]$. При $m = [n^{\alpha}]$, $\alpha < \alpha_0$, множитель при первом слагаемом $m^{b(1)} n^{-1/2}$ будет убывать медленнее множителей у других слагаемых, поскольку $b(i) > b(1) = (6\alpha_0)^{-1}$ при $i = 2, \ldots, \tilde{l}$. Выберем α так, чтобы $m^{b(1)}n^{-1/2}$ и m^{-1} имели одинаковый порядок по n, т. е. положим

$$\alpha = \frac{1}{2(b(1)+2} = \frac{3\alpha_0}{6\alpha_0+1}.$$

Получим, что оценка (5) верна при $a = a_1$, где $a_1 = \alpha > 1/3$. (Отметим, что $\alpha \to 0{,}375$ при $\alpha_0 \to 1/2$.)

Повторим рассуждения, проведенные с начала настоящего пункта, заменив $a_0 = 1/3$ на a_1. Именно, при $\alpha_0 > a_1$ для $m = [n^{\alpha_0}]$ вместо (44) получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^{\tilde{l}} m^{b(i)} n^{-i/2} K_1(z, i, m) = O(n^{-a_1+\varepsilon}). \tag{48}$$

Аналогично доказательству (45) получаем, что каждое слагаемое в (48) имеет тот же порядок, что и вся сумма. Выражая n через m, получаем, что $K_1(z, i, m)$ есть $O(m^{\lambda^{(1)}(i)})$, где

$$\lambda^{(1)}(i) = -\frac{a_1}{\alpha_0} + \frac{i}{2\alpha_0} - b(i) + \frac{\varepsilon}{\alpha_0}.$$

Пусть $\lambda_1^{(1)}(i) = \lambda^{(1)}(i) - \frac{\varepsilon}{\alpha_0}$. Положим $K_2(z, i, m) = m^{-\lambda_1^{(1)}(i)} K_1(z, i, m)$, если $\lambda_1^{(1)}(i) < 0$, и $K_2(z, i, m) = K_1(z, i, m)$ в противном случае. Затем получим формулу, отличающуюся от (47) заменой $b(i)$ на $b_1(i)$, где $b_1(i) = b(i) + \lambda_1^{(1)}(i)$, если $\lambda_1^{(1)}(i) < 0$ и $b_1(i) = b(i)$ в противном случае. Легко видеть, что $b_1(i) \geqslant i - 1$, поскольку иначе в противоречие с нашими рассуждениями оценка соответствующего слагаемого убывала бы быстрее, чем правая часть (48). Следовательно, $b_1(i) \geqslant 1 > b_1(1)$ при $i = 2, \ldots, \tilde{l}$. Следовательно, если $m = [n^{\alpha}]$ и $\alpha < \alpha_0$, то $m^{b_1(1)}n^{-1/2}$ убывает медленнее, чем $\frac{m^{b_1(i)}}{(\sqrt{n})^i}$ при $i > 1$. Затем, выбрав α так, чтобы $m^{b_1(1)}n^{-1/2}$ и m^{-1} имели одинаковый порядок, получим, что оценка (5) верна при $a = a_2$, где $a_2 > a_1 > a_0 = 1/3$.

Затем по a_2 тем же методом получаем a_3, потом a_4, и т. д. По индукции доказывается следующая лемма.

Лемма 16. *Для* $i = 1, 2, \ldots$

$$a_{i+1} = R(a_i), \text{ где } R(y) = \frac{\alpha_0}{1 - 2y + 2\alpha_0}.$$

Последовательность $\{a_i\}$ *сходится к* α_0 *при* $i \to \infty$.

Для доказательства оценки (5) при $a = 1/2$ возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $\alpha_0 = (1 - \varepsilon)/2$. По лемме 16 существует k, такое, что $1/2 - a_k < \varepsilon$. Повторяя проведенные в начале настоящего пункта рассуждения k раз, получаем требуемое.

Отметим, что лемма 15 использовалась лишь для получения начального значения a_0, к которому затем применялся описанный в настоящем пункте процесс «итерации формул». Можно не использовать симметрию шара $T(z)$. Действительно, возьмем α, такое, что $\sqrt{\frac{m^2}{n}}$ и m^{-1} имеют одинаковый порядок, т. е. $\alpha = 1/4$. Получим, что оценка (5) верна при $a = 1/4$ — результат, по порядку совпадающий с наилучшими из полученных другими авторами. Далее проводятся те же рассуждения, что и раньше, с заменой $1/3$ на $1/4$. Лемма 16, разумеется, остается справедливой.

7. Перейдем к доказательству того, что оценка (5) неверна при $a > 1$. Легко подсчитать, что дисперсия ω_n^2 меньше дисперсии ω^2 на $(60n)^{-1}$. Для произвольной функции распределения $F(x)$ выполнено равенство

$$\int_0^a x^2\,dF(x) = x^2F(x)\Big|_0^a - \int_0^a xF(x)\,dx.$$

Пусть $a = n^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Подставим вместо $F(x)$ функции распределения $\mathbf{P}\{\omega_n^2 < x\}$ и $\mathbf{P}\{\omega^2 < x\}$ и вычтем одно равенство из другого. Воспользовавшись результатом Ю. В. Прохорова [15] об экспоненциально быстром убывании при $x \to \infty$ хвостов распределений ω_n^2 и ω^2, получаем, что разность дисперсий ω_n^2 и ω^2 не превышает $\Delta_n n^{2\varepsilon}$ при достаточно больших n. Поскольку ε сколь угодно мало, то оценка (5) не может быть верна при $a > 1$.

З а м е ч а н и е 1. В работе Н. В. Смирнова [2] рассматривалась случайная величина

$$\Omega^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\eta_j^2}{\lambda_j},$$

где $\{\eta_j\}$ — независимые в совокупности стандартные нормальные величины, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_j < \lambda_{j+1} < \ldots$, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1}$ сходится. При $\lambda_j = j^2\pi^2$ получаем случайную величину ω^2 из (3). В приведенных Н. В. Смирновым разложениях в ряд функций распределения Ω^2 и ω^2 (формулы (97), (109) из [2], повторенные в [6]), к сожалению, пропущен множитель $(-1)^k$. Этот факт отмечался несколькими исследователями независимо друг от друга, в частности, Г. В. Мартыновым и автором. Исправленные формулы оказались полезными для вычислений. Например, они были использованы Г. В. Мартыновым [16]. Приведем исправленную часть доказательства леммы 6 в [2].

Пусть $\varphi(\xi)$ — характеристическая функция Ω^2. Легко видеть, что

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{D(\lambda)}}, \text{ где } \lambda = 2i\xi,\quad D(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right).$$

В [2] выделяется однозначная ветвь функции $\sqrt{D(\lambda)}$, аналитическая всюду, кроме разрезов по интервалам $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ вещественной оси λ ($k =$

$= 1, 2, \ldots$) и такая, что $\sqrt{D(0)} = 1$. Чтобы найти скачки на разрезах этой аналитической ветви, вычислим знак ее мнимой части на полупрямой $x + i\varepsilon$, $x \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, бесконечномало отстоящей от положительной полуоси. Поскольку

$$D(i\varepsilon) = 1 - i\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} + O(\varepsilon^2),$$

то $D'(0) < 0$ и мнимая часть $\sqrt{D(i\varepsilon)}$ отрицательна. Знак мнимой части $\sqrt{D(x + i\varepsilon)}$ меняется там и только там, где $w(x) = D(x + i\varepsilon)$ пересекает положительную полуось. Справедливо равенство

$$D(x + i\varepsilon) = D(x) + i\varepsilon D'(x) + O(\varepsilon^2).$$

Очевидно, что $D(x) > 0$, если $x < \lambda_1$ или $\lambda_{2k} < x < \lambda_{2k+1}$, и $D(x) < 0$, если $\lambda_{2k-1} < x < \lambda_{2k}$. Легко проверить, что $D'(\lambda_{2k-1}) < 0$, а $D'(\lambda_{2k}) > 0$ ($k = 1, 2, \ldots$,). Поэтому $D'(x)$ меняет знак нечетное число раз на каждом смежном к множеству разрезов интервале $(\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1})$, где, кроме того, $D(x) > 0$. На $(0, \lambda_1)$ функция $D'(x)$ меняет знак четное число раз. Стало быть, $\operatorname{Im}\sqrt{D(i\varepsilon)}$ и $\operatorname{Im}\sqrt{D(\lambda_1 + i\varepsilon)}$ отрицательны, $\operatorname{Im}\sqrt{D(x + i\varepsilon)}$ не меняет знак при $\lambda_{2k-1} < x < \lambda_{2k}$ и меняет знак при переходе от $x = \lambda_{2k}$ к $x = \lambda_{2k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\operatorname{Im}\sqrt{D(x + i\varepsilon)} < 0$ при $\lambda_1 < x < \lambda_2$, и вообще $\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt{D(x + i\varepsilon)} = (-1)^k$ при $\lambda_{2k-1} < x < \lambda_{2k}$. Кроме того, $\sqrt{D(x + i\varepsilon)}$ и $\sqrt{D(x - i\varepsilon)}$ комплексно сопряжены в силу принципа симметрии [17]. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sqrt{D(x + i\varepsilon)} = (-1)^k i \sqrt{-D(x)}$$

при $\lambda_{2k-1} < x < \lambda_{2k}$, а скачок аналитической ветви $(\sqrt{D(\lambda)})^{-1}$ на разрезе $\lambda_{2k-1} < x < \lambda_{2k}$ равен

$$-2(-1)^k i (\sqrt{-D(x)})^{-1},$$

где имеется в виду арифметическое значение корня. Это выражение отличается множителем $(-1)^k$ от использованного в [2]. Изменив соответствующие места в рассуждениях [2], получим вместо (97) в [2] следующую формулу для функции распределения случайной величины Ω^2 $(x > 0)$:

$$F(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k}} \frac{e^{-\frac{\lambda x}{2}}}{\sqrt{-D(\lambda)}} \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

(Замечание 1 получено совместно с С. А. Пироговым.)

Замечание 2. Развитый в настоящей работе метод позволяет получать также оценки скорости сходимости статистик типа Колмогорова — Смирнова. Получены [19] оценки типа (5) с $a = 1/4$, что по порядку совпадает с результатами Кифера [14] и Никитина [25], [26].

Автор благодарен В. В. Сазонову за критические замечания.

Лаборатория теории вероятностей и математической статистики ЦЭМИ АН СССР

Поступила в редакцию 2.2.72

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов**, Таблицы математической статистики. М., изд-во «Наука», 1965 (1 изд.), 1968 (2 изд.).

[2] **Н. В. Смирнов**, О распределении ω^2-критерия Мизеса, Матем. сб., **2** (44), 5 (1937), 973—993 (перепечатано в книге: Н. В. Смирнов, Теория вероятностей и математическая статистика, Избранные труды, М., изд-во «Наука», 1970, 60—78).

[3] **И. И. Гихман, А. В. Скороход**, Введение в теорию случайных процессов, М., изд-во «Наука», 1965.

[4] **T. W. Anderson, D. A. Darling**, Asymptotic theory of certain «goodness of fit» criteria based on stochastic processes, Ann. Math. Statist., **23**, 2 (1952), 193—212.

[5] **В. Феллер**, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., изд-во «Мир», 1967.

[6] **Н. В. Смирнов**, Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным, Успехи матем. наук, X (1944), 179—206 (перепечатано в книге: Н. В. Смирнов, Теория вероятностей и математическая статистика, Избранные труды, М., изд-во «Наука», 1970, 133—159).

[7] **V. V. Sazonov**, On ω^2-criterion, Sankhyā, Ser. A, **30**, 2 (1968), 205—209.

[8] **В. В. Сазонов**, Улучшение одной оценки скорости сходимости, Теория вероят. и ее примен., XIV, 4 (1969), 667—678.

[9] **W. A. Rosenkrantz**, A rate of convergence for the von Mises statistic, Trans. Amer. Math. Soc., 139 (1969), 329—337.

[10] **А. И. Орлов**, Оценки скорости сходимости к пределу распределений некоторых статистик, Теория вероят. и ее примен., **XVI**, 3 (1971), 583—584.

[11] **С. Уилкс**, Математическая статистика, М., изд-во «Наука», 1967.

[12] **Г. М. Фихтенгольц**, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М., изд-во «Наука», 1966.

[13] **Я. Ю. Никитин**, Оценки скорости сходимости в некоторых предельных теоремах и статистических критериях, ДАН СССР, **202**, 4 (1972), 758—760.

[14] **J. Kiefer**, Skorohod embedding of multivariate RV's and the sample DF, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., **24**, 1 (1972), 1—35.

[15] **Ю. В. Прохоров**, Распространение неравенств С. Н. Бернштейна на многомерный случай, Теория вероят. и ее примен., **XIII**, 2 (1968), 266—274.

[16] **Г. В. Мартынов**, Вычисление предельного распределения статистик критерия нормальности типа ω^2, Теория вероят. и ее примен., **XVIII**, 3 (1973), 671—673.

[17] **А. Картан**, Элементарная теория аналитических функций одной и нескольких комплексных переменных, М., ИЛ, 1963.

[18] **А. И. Орлов**, Предельные теоремы для статистик интегрального типа, Международная конференция по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 25—30 июня, 1973), Тезисы докладов, т. 2, Vilnius, 1973, 137—140.

[19] **А. И. Орлов**, Переход от сумм к интегралам и его применения в изучении асимптотических распределений статистик, Теория вероят. и ее примен., **XVIII**, 4 (1973), 881—883.

[20] **А. Бикялис**, Формулы суммирования Эйлера — Маклорена для функций многих переменных, Литовский матем. сб., **VIII**, 4, (1968), 681—684.

[21] **И. И. Гихман**, При одне питання з теорії ω^2-крітерія, Матем. збірнік Київськ. держ. ун-ту, 5 (1954), 51—59.

[22] **В. К. Иванов**, Многомерные обобщения сумматорной формулы Эйлера, Изв. высш. учебн. завед., матем., **6** (37), 1963, 72—80.

[23] **В. М. Калинин**, Предельные свойства вероятностных распределений, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **CIV** (1968), 88—134.

[24] **Х. Мансуров**, Аналог формулы Эйлера — Маклорена для функций двух переменных, Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, **6** (1961), 15—22.

[25] **Я. Ю. Никитин**, О граничной задаче для эмпирического процесса, ДАН СССР, 205, 5 (1972), 1043—1046.

[26] **Я. Ю. Никитин,** Оценки скорости сходимости в некоторых предельных теоремах и статистических критериях, Канд. дисс. Л., 1973.
[27] **А. И. Орлов,** О проверке симметрии распределения, Теория вероят. и ее примен. XVII, 2 (1972), 372—377.
[28] **А. И. Орлов,** Необходимые и достаточные условия в предельной теории статистик интегрального типа, Теория вероят. и ее примен., XVIII, 3 (1973), 673—675.
[29] **Ю. В. Прохоров,** Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., I, 3 (1956), 177—238.
[30] **А. В. Скороход,** Исследования по теории случайных процессов, Киев, изд-во КГУ, 1961.
[31] **J. R. Blum, J. Kiefer, M. Rosenblatt,** Distribution free test of independence based on the sample distribution function, Ann. Math. Statist., 32 (1961), 485—492.
[32] **D. A. Darling,** The Cramer — Smirnov test in the parametric case, Ann. Math. Statist., 26, 1 (1955), 1—20.
[33] **D. A. Darling,** The Kolmogorov — Smirnov, Cramer — von Mises tests, Ann. Math. Statist., 28, 4 (1957), 823—838.
[34] **J. L. Doob,** Heuristic approach to the Kolmogorov — Smirnov theorems, Ann. Math. Statist., 20 (1949), 393—403.
[35] **M. Kac, J. Kiefer, J. Wolfowitz,** On test of normality and other tests of goodness-of fit based on distance methods, Ann. Math. Statist., 26, 2 (1955), 189—211.
[36] **J. Kiefer,** K-sample analogues of the Kolmogorov — Smirnov and Cramer — von Mises tests, Ann. Math. Statist., 30, 2 (1959), 420—447.
[37] **E. L. Lehmann,** Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests, Ann. Math. Statist., 22, 1 (1951), 165—179.
[38] **C. Müller,** Eine Verallgemeinerung der Eulerschen Summenformel und..., Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 19, 1/2 (1954), 41—62.
[39] **M. Rosenblatt,** Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic, Ann. Math. Statist., 23, 4 (1952), 617—623.
[40] **E. D. Rothman, M. Woodroofe,** A Cramer — von Mises statistic for testing symmetry, Ann. Math. Statist, 43, 6 (1972), 2035—2038.
[41] **E. D. Rothman,** Tests for uniformity of a circular distribution, Sankhyā, ser. A, 34, 1 (1972), 23—32.
[42] **E. D. Rothman,** Tests of coordinate independence for a bivariate sample on a torus, Ann. Math. Statist., 42, 6 (1971), 1962—1969.
[43] **A. W. Marshall,** The small sample distribution of $n\omega_n^2$. Ann. Math., Statist., 29 (1958), 307—309.

THE RATE OF CONVERGENCE OF THE MISES—SMIRNOV STATISTIC'S DISTRIBUTION

A. I. ORLOV (MOSCOW)

(*Summary*)

We consider n independent random variables with a continuous distribution function $F(x)$ and empirical distribution function $F_n(x)$. Put

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dF(x),$$

and

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\omega_n^2 < z\},$$

$$\Delta_n = \sup_{-\infty<z<\infty} |\mathbf{P}\{\omega^2 < z\} - S(z)|.$$

Many papers dealt with the estimate: For each $\varepsilon > 0$, there exists a $b(\varepsilon)$ such that

$$\Delta_n < b(\varepsilon)\, n^{-a+\varepsilon} \qquad (1)$$

for $n = 1, 2, \ldots$.

The inequality (1) is proved for $a = 1/10$ [7], $a = 1/6$ [8], $a = 1/4$ [9], $a = 1/3$ [10]. In the present paper, we obtain (1) for $a = 1/2$.